SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA - PIBIC

INTRODUÇÃO AOS SISTEMA DINÂMICOS DE DIMENSÃO INFINITA

Área do conhecimento: Matemática
Subárea do conhecimento: Análise Matemática
Especialidade do conhecimento: Equações Diferenciais Parciais

Relatório Final
Período da bolsa: de 08/2018 a 07/2019

Este projeto é desenvolvido com bolsa de iniciação científica

PIBIC/CNPq

Orientador: Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos.
Autor: Thyago Souza Rosa Santos.

Sumário

1 Introdução

Ao longo dos anos tanto cientistas aplicados quanto matemáticos puros vêm demonstrando um grande interesse no estudo e desenvolvimento de modelos matemáticos de fenômenos físicos, químicos, biológicos e atmosféricos, visto que estes formam uma ponte entre o mundo real e as ciências teóricas. Grande parte destes modelos são descritos por meio de equações diferenciais, em especial, através de equações diferenciais parciais de evolução.

Por este motivo, durante as últimas décadas a teoria das equações diferenciais parciais de evolução passou por um rápido desenvolvimento. São temas bastante destacados nesta linha de pesquisa o estudo de existência, unicidade e dependência contínua das soluções com relação aos dados iniciais, a teoria de regularidade (temporal e/ou espacial) das soluções e o estudo do comportamento assintótico das soluções de tais equações. A teoria matemática envolvida nesta linha de pesquisa faz uso intenso de teoria espectral, funções especiais (como as funções de Mittag-Leffler, a função Gamma e a função Beta), bem como de todas as ferramentas usuais empregadas no estudo de equações diferenciais em espaços de Banach.

No presente projeto tivemos particular interesse no estudo do comportamento assintótico das soluções de uma equação diferencial parcial de evolução. É fato que a teoria matemática de sistemas dinâmicos tem como base a teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias (dimensão finita) introduzida por H. Poincaré (1854-1912), e posteriormente desenvolvida por A. Lyapunov (1857-1918) e A. Andronov (1901-1952). Logo, naturalmente, todos os métodos, ideias e conceitos provenientes dos sistemas dinâmicos de dimensão finita constituem a principal fonte de ideias e abordagens utilizadas na correspondente teoria em dimensão infinita. Contudo, tais abordagens precisam ser cuidadosamente reavaliadas e adaptadas.

Para isso, em um primeiro momento, estudamos conceitos e resultados básicos sobre sistemas dinâmicos de dimensão infinita. Este tipo de dinâmica surge principalmente em modelos matemáticos de processos que ocorrem em sistemas reais (físicos, químicos, biológicos, etc.) cujos estados podem ser caracterizados por um número infinito de parâmetros. Por conseguinte aplicamos tais resultados para mostrar, sob determinadas condições de regularidade, a existência de conjuntos absorventes e atratores globais para os sistemas dinâmicos gerados pela soluções das equações de Navier-Stokes e as equações de Reação-Difusão.

2 Atividades realizadas

Etapa 1: Agosto de 2018 - Janeiro de 2019. Realizamos os seguintes estudos ao longo do primeiro semestre sugerido no projeto:

- Espaços métricos:
  - Funções Contínuas;
  - Conjuntos Conexos;
  - Limites;
  - Continuidade Uniforme;
  - Espaços Métricos Completos;
  - Espaços Métricos Compactos.
- Sistema Dinâmicos Não Lineares:
  - Atratores para semigrupos;
  - Caracterização de existência de atratores para semigrupos;
  - Condições suficientes para existência de atratores para semigrupos.

Etapa 2: Fevereiro - Julho de 2019. Nesta etapa realizamos o estudo dos seguintes tópicos:

- Equações de Navier-Stokes:
  - Boa colocação do problema em 2 dimensões;
  - Existência de atratores globais.
- Equações de reação-difusão não lineares:
  - Boa colocação do problema em domínios de $\mathbb{R}^m$.
  - Existência de atratores globais;
  - Regularidade dos atratores.

3 Outras Atividades

Além das atividades previstas, é importante ressaltar aqui que desde agosto de 2018 o discente cadastrado nesse projeto é aluno especial do Mestrado Acadêmico em Matemática da Universidade Federal de Sergipe - PROMAT, tendo cursado as seguintes disciplinas:

- MATEM0027 - Análise Matemática - ministrada pelo Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres;
- MATEM0025 - Estruturas Algébricas - ministrada pelo Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos;
- MATEM0061 - Topologia Geral - ministrada pela Prof. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva;
- MATEM0036 - Medida e Integração - ministrada pelo Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo.

onde obteve conceito A em cada uma delas.

Ademais, o discente participou do *6th Workshop on Analysis and PDEs* no período de 28 à 30 de novembro de 2018 como membro da comissão organizadora e também na condição de ouvinte.

4 Metodologia

A metodologia que foi empregada é padrão em Matemática: reuniões periódicas entre o discente e o pesquisador/orientador proponente do projeto. Estas reuniões tiveram como metas o estudo da teoria existente, o planejamento da evolução pretendida e a discussão dos resultados alcançados.

5 Revisão de Literatura

5.1 Sistemas Dinâmicos Não Lineares

Para garantirmos que os sistemas considerados neste plano de trabalho incluam modelos mais gerais que as equações diferenciais ordinárias, consideraremos X um espaço métrico e representaremos por $\mathcal{C}(X)$ o espaço das transformações contínuas de X em X.

Definição 5.1 *Um semigrupo (ou sistema dinâmico) em X é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que:*

(i) $T(0)x = x$, *para todo* $x \in X$*;*

(ii) $T(t)T(s) = T(t+s)$, *para todos* $t, s \in [0, \infty)$*;*

(iii) *A aplicação* $(t, x) \mapsto T(t)x$ *é contínua para todo* $(t, x) \in [0, \infty) \times X$.

Seja A um subconjunto de um espaço métrico X. Diremos que A é invariante pelo semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se

$$T(t)A = A, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Para definirmos a noção de atração sob a ação de um semigrupo, relembramos que a semi-distância de Hausdorff entre dois subconjuntos A e B de X é dada por

$$dist_H(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y),$$

onde $d : X \times X \to [0, \infty)$ é a distância em X. Assim, diremos que A atrai B sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se

$$\lim_{t \to \infty} dist_H(T(t)B, A) = 0.$$

Definição 5.2 *Um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ é chamado um atrator global para um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{T(t) : t \geq 0\}$.*

No nosso estudo sobre sistemas dinâmicos realizado neste projeto os atratores globais desempenharam um papel central. Neste sentido, o seguinte resultado é fundamental.

Teorema 5.1 *Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$ se, e somente se, é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto.*

Além disso, condições suficientes para a existência de tais atratores foram apresentadas.

Teorema 5.2 *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um semigrupo ponto dissipativo e eventualmente compacto. Então* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *tem um atrator global* A.

Teorema 5.3 *Seja* X *um espaço de Banach e* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um semigrupo em* X. *Assuma que* $T(t) = S(t) + K(t)$ *com* $S(t)$ *e* $K(t)$ *satisfazendo:*

- *Para cada conjunto limitado* B *em* X, *existe um* $t_B \in \mathbb{T}^+$ *tal que* $K(t)B$ *é relativamente compacto para todo* $t \geq t_B$.
- *Para cada conjunto limitado* B *em* X, *existe um* $t_B \in \mathbb{T}^+$ *tal que* $\sup_{x\in B} \| S(t)x \|_{\mathrm{X}} := s_B(t) < \infty$ *para todo* $t \geq t_B$ *e* $s_B(t) \to 0$

Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é assintoticamente compacto. Além disso, se* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é ponto dissipativo e eventualmente limitado, então ele possui um atrator global.*

5.2 Equações de Navier-Stokes

Para um fluído newtoniano incompressível que ocupa uma determinada região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ as equações de Navier-Stokes são dadas por

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f(x,t), \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty), \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $u(x,t)$ representa a velocidade do fluído, $p(x,t)$ a pressão escalar em cada ponto do domínio Ω e o parâmetro $\nu > 0$ a viscosidade cinemática do fluído.

Para dizermos algo no que diz respeito a existência de soluções, precisamos impor algumas condições de regularidade. Assim, vamos considerar a equação sobre um dominío $Q = [0,L] \times [0,L]$ e impor condições de contorno periódicas. Embora não corresponda a nenhuma situação fisícamente realista, o tratamento matemático é bastante simplificado. No entanto, os problemas que obstruem a existência de uma prova tridimensional para as condições de contorno de Dirichlet estão presentes neste caso e toda a análise que realizaremos a seguir pode ser estendida para um caso fisicamente relevante de condições de contorno de Dirichlet sobre um domínio suave Ω ($u \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$).

As condições iniciais também serão escolhidas para que possamos trabalhar em um espaço de funções periódicas e assumiremos que

$$\int_Q u_0(x)\ dx = 0 \quad e \quad \int_Q f(x,t)\ dx = 0$$

para todo $t \geq 0$. Segue da equação de evolução (1) que

$$\int_Q \sum_j (D_j u_j) u_i\ dx = 0,$$

visto que $\nabla \cdot u = 0$. Deste modo temos que

$$\int_Q u(x,t)\ dx = 0,$$

para todo $t \geq 0$, e assim podemos trabalhar de forma consistente em espaços como $L^2(Q)$. Mesmo com essas simplificações, o problema de existência e unicidade de soluções no caso tridimensional ainda não está resolvido de maneira geral. Para continuar nossa análise, precisamos também definir espaços de funções que englobem a periocidade e a condição de *divergence-free*:

$$H = \{u \in \mathbb{L}^2(Q) : \nabla \cdot u = 0\} \quad e \quad V = \{u \in \mathbb{H}^1_p(Q) : \nabla \cdot u = 0\},$$

onde

$$\mathbb{L}^2(Q) = L^2(Q) \times L^2(Q) \quad e \quad \mathbb{H}^k_p(Q) = H^k_p(Q) \times H^k_p(Q).$$

Será necessário também considerarmos a formulação fraca das equações de Navier-Stokes, tal formulação envolve somente $u(x,t)$ e ela é obtida tomando o produto interno da primeira equação de (1) por uma função teste $v \in V$ e integrando sobre Q. Usando a fórmula de Green e as condições de fronteira, o termo envolvendo a pressão $p(x,t)$ desaparece e obtemos,

$$\langle u_t, v\rangle + \nu\langle Au, v\rangle + b(u,u,v) = \langle f, v\rangle \tag{2}$$

onde $v \in V$, $A : V \longrightarrow V^*$ é o operador linear de Stokes e $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ é uma forma trilinear definida por

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_Q u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j\ dx.$$

5.2.1 Existência de Soluções Fracas

Para obtermos resultados no que diz respeito as soluções das equações (1) será interessante reformulá-las. Baseados na equação (2) podemos reescrever as equações de Navier-Stokes como

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u,u) = f, \tag{3}$$

onde $A : V \longrightarrow V^*$ é o operador linear de Stokes e $B : V \times V \longrightarrow V^*$ é um operador bilinear que satisfaz a condição

$$\langle B(u,v), w\rangle = b(u,v,w) \quad \text{para todo} \quad w \in V.$$

Se assumirmos que $f \in V^*$ em (3), então podemos assegurar uma igualdade em V^* para quase todo $t \in [0,T]$.

Teorema 5.4 *(Existência e Unicidade de Soluções Fracas) Seja $f \in L^2_{loc}(0,T;V^*)$. Se $u_0 \in H$ então existe uma única solução fraca $u(t)$ de*

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u,u) = f(x,t)$$

tal que, para todo $T > 0$,

$$u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V).$$

Além disso, a solução satisfaz

$$u \in C([0,T];H), \quad \forall\, T > 0,$$

e depende continuamente da condição inicial u_0.

Este resultado mostra que se $f(x,t)$ não depende de t, podemos definir, para cada $t \geq 0$, os operadores

$$\begin{array}{rccl} S_H(t): & H & \longrightarrow & H \\ & u_0 & \longmapsto & S_H(t)u_0 = u(t). \end{array} \tag{4}$$

A família $\{S_H(t) : t \geq 0\}$ goza das propriedades de semigrupo.

5.2.2 Existência de Soluções Fortes

Podemos ainda obter soluções suaves se exigirmos f suave e considerarmos a condição inicial como um elemento de V ao invés de um vetor em H.

Teorema 5.5 *(Existência de Soluções Fortes) Se $u_0 \in V$ e $f \in L^2_{loc}(0,\infty;H)$, então existe uma única solução forte de*

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u,u) = f(x,t) \qquad \textit{(como uma igualdade em } L^2(0,\infty;H))$$

que satisfaz

$$u \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A)), \quad \textit{para todo } T > 0,$$

e de fato $u \in C^0([0,T];V)$. Além disso, as soluções dependem continuamente da condição inicial u_0.

Note que a unicidade de tais soluções segue do teorema (5.4), uma vez que uma solução forte é também uma solução fraca.

Assim como no caso de soluções fracas, quando $f(x,t)$ não depende de t, também podemos definir um semigrupo fortemente contínuo sobre V

$$\{S_V(t) : t \geq 0\}$$

e pela unicidade das soluções, temos que $S_V(t) = S_H(t)|_V$. Portanto, denotaremos ambos simplismente por $S(t)$.

Em suma, quando $f(x,t)$ independe do tempo t, as equações de Navier-Stokes podem ser usadas para gerar um semigrupo fortemente contínuo sobre H (se $f \in V^*$) ou sobre V (se $f \in H$). Desta forma, podemos usar o conceito de atrator global visto anteriormente para ajudar a investigar o comportamento assintótico dos semigrupos provenientes de tais equações.

5.3 Equações de Reação-Difusão Não Lineares

A difusão de concentração de uma determinada substância química evoluindo em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é modelada através das equações

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde $u(x,t)$ representa a densidade da concentração e f é uma função não-linear.

Para questões relativas à existência e unicidade de soluções para (5), trataremos esta equação em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, impondo condições de contorno de Dirichlet e regularidade sobre o domínio Ω. Também exigiremos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função C^1 que satisfaz

$$-k - \alpha_1|s|^p \leq f(s)s \leq k - \alpha_2|s|^p, \quad p > 2,$$

e

$$f'(s) \leq L,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Para obtermos resultados no que diz respeito as soluções das equações (5) será interessante reformulá-las. Para isso vamos considerar $u(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $u(t)(x) := u(x,t)$. Assim, podemos reescrever as equações (5) como

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \qquad u(0) = u_0 \tag{6}$$

onde A é o operador definido por $A\psi = -\Delta\psi$ com domínio $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Esta forma da equação serve para enfatizar que a dependência espacial é tratada de uma maneira diferente da dependência do tempo. Observe que incorporamos a condição de contorno na definição do domínio do operador A.

5.3.1 Existência de Soluções Fracas

O resultado seguinte garante a existência de soluções fracas para (6).

Teorema 5.6 *(Existência e unicidade de soluções fracas) Sejam $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ e f uma função C^1 satisfazendo*

$$-k - \alpha_1 |s|^p \leq f(s)s \leq k - \alpha_2 |s|^p, \qquad p > 2$$

e

$$f'(s) \leq L.$$

Então existe uma única solução fraca u de (6)

$$u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\Omega_T)), \qquad u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega)),$$

e a aplicação $u_0 \mapsto u(t)$ é contínua em $L^2(\Omega)$.

Podemos, portanto, usar essas soluções para definir uma classe de operadores em $L^2(\Omega)$ da seguinte maneira

$$\begin{array}{rccl} S(t): & L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & u_0 & \longmapsto & S(t)u_0 = u(t). \end{array}$$

As condições de continuidade, junto com a unicidade, mostram que a família$\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo. Assim, o par

$$\big(L^2(\Omega), \{S(t) : t \geq 0\}\big) \tag{7}$$

é um sistema dinâmico. Consequentemente, $L^2(\Omega)$ é um espaço de fase apropriado para estudar a dinâmica da equação reação-difusão. Também vale ressaltar que podemos utilizar este espaço sem impor condições muito fortes a função f.

5.3.2 Existência de Soluções Fortes

O próximo teorema estabelece condições suficientes para existência de soluções fortes de (6).

Teorema 5.7 *(Existência de soluções fortes) Seja $f(0) = 0$. Se $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ então existe uma única solução forte u de (6) tal que*

$$u(t) \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^p(\Omega)) \cap L^2(0,T; D(A)).$$

Observe, no entanto, que a unicidade segue do Teorema (5.6), uma vez que uma solução forte é também uma solução fraca.

Sem mais restrições sobre p, não podemos garantir que a aplicação $u_0 \mapsto u(t)$ é continua. Porém, no caso $m \leq 3$ é possível provar a continuidade da aplicação.

Proposição 5.1 *Se $m = 1$ ou $m = 2$ então para cada $t \geq 0$ fixo, a aplicação $u_0 \mapsto u(t)$ é contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$.*

Segue assim que para $m = 1$ e $m = 2$ podemos tomar $H_0^1(\Omega)$ como um espaço de fase para a equação de reação-difusão. Considerando os operadores $S(t) : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ dados por $S(t) = u(t)$ temos que o par

$$\left(H_0^1(\Omega), \{S(t) : t \geq 0\}\right) \tag{8}$$

é um sistema dinâmico. Perceba que a unicidade de soluções nos mostra que na verdade (8) é a restrição do sistema dinâmico (7) a $H_0^1(\Omega)$.

6 Resultados e Discussões

6.1 O Atrator Global das Equações de Navier-Stokes

Investigamos a existência de atratores globais para as equações de Navier-Stokes. Consideramos novamente o caso bidimensional, para o qual provamos a existência de conjuntos absorventes em $\mathbb{L}^2$, $\mathbb{H}^1$ e $\mathbb{H}^2$.

Proposição 6.1 *Se $f \in H$ então existe um conjunto absorvente em V, isto é, existem constante positivas $t_1(\|u_0\|_H)$, ρ_V e I_A tais que*

$$\|u(t)\|_V \leq \rho_V \quad e \quad \int_t^{t+1} \|Au(s)\|_H^2 \, ds \leq I_A,$$

para todo $t \geq t_1(\|u_0\|_H)$.

Esta proposição nos mostra que há um atrator global para o sistema dinâmico em $H \subset \mathbb{L}^2$ (pois H^1 está compactamente imerso em L^2) desde que $f \in H$. Além disso, mostramos que qualquer solução sobre o atrator em $L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A))$ deve ser uma solução forte. Assim podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 6.1 *Se $f \in H$ então o sistema dinâmico sobre H gerado pelas equações Navier-Stokes tem um atrator global $\mathcal{A}_H$, e as soluções em $\mathcal{A}_H$ são soluções fortes para a equação original.*

Perceba que acabamos de mostrar que há um conjunto absorvente limitado (mas não compacto) em V, e assim podemos definir o seguinte conjunto

$$\mathcal{A}_W = \bigcap_{T \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{t \geq T} S(t)B} \right),$$

onde B é a bola absorvente em V obtida da Proposição 6.1, porém o fecho é tomado em H. Isto gera um conjunto $\mathcal{A}_W$ que é limitado (mas não compacto) em V e atrai todas as órbitas na norma de H. No entanto, um atrator global em V deve que atrair na norma de V. Para obter um atrator global adequado para o semigrupo em V, temos que encontrar um conjunto absorvente compacto em V. Faremos isso mostrando que há um conjunto de absorção em $\mathbb{H}^2$.

Proposição 6.2 *Se $f \in H$ não depende de t então existe um conjunto absorvente em V, isto é, existem constante positivas $t_2(\|u_0\|_H)$ e ρ_A tais que*

$$\|Au(t)\|_H \leq \rho_A, \quad \forall\, t \geq t_2(\|u_0\|_H).$$

Em particular, $\mathcal{A}_H$ é limitado em $\dot{\mathbb{H}}_p^2(Q)$.

Dessa forma o sistema dinâmico sobre V possui um atrator global, assim podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 6.2 *Se $f \in H$ então o sistema dinâmico sobre V gerado pelas equações de Navier-Stokes possui um atrator global $\mathcal{A}_V$.*

6.2 O Atrator Global das Equações de Reação-Difusão Não Lineares

Mostramos que as equações de reação-difusão geram um sistema dinâmico sobre $L^2(\Omega)$. De maneira análoga a feita com as equações de Navier-Stokes, investigamos a existência de conjuntos absorventes em L^2 e H_0^1.

Proposição 6.3 *A equação de reação-difusão admite um conjunto absorvente em $L^2(\Omega)$, isto é, existem constantes positivas ρ_H e $t_0(\|u_o\|_{L^2})$ tais que a solução $u(t) = S(t)u_0$ verifica*

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq \rho_H,$$

para todo $t \geq t_0(\|u_0\|_{L^2})$.

Proposição 6.4 *A equação de reação-difusão admite um conjunto absorvente em $H_0^1(\Omega)$, isto é, existem constantes positivas ρ_V e $t_1(\|u_o\|_{L^2})$ tais que*

$$\|u(t)\|_{H_0^1} \leq \rho_V,$$

para todo $t \geq t_1(\|u_0\|_{L^2})$.

Usando o conjunto absorvente fornecido na Proposição 6.4 podemos deduzir a existência de um atrator global para as equações de reação-difusão.

Teorema 6.3 *A equação de reação-difusão possui um atrator global conexo $\mathcal{A}$.*

Mostramos que o atrator global é um subconjunto limitado de $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. No entanto, em muitas situações podemos fazer ainda melhor e mostrar maior regularidade de soluções no atrator. Neste trabalho, mostramos que o atrator é limitado em L^∞ e também em H^2.

Teorema 6.4 *O atrator global $\mathcal{A}$ da equação de reação-difusão é uniformemente limitado em $L^\infty(\Omega)$, com*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{k}{\alpha_2}\right)^{1/p},$$

para todo $u \in \mathcal{A}$.

Em seguida usamos a limitação em L^∞ para deduzir que o atrator é limitado em $H^2(\Omega)$.

Teorema 6.5 *O atrator global da equação de reação-difusão é limitado em* $H^2(\Omega)$.

7 Conclusões

Este relatório apresenta o trabalho elaborado pelo discente Thyago Souza Rosa Santos desenvolvido entre os meses de agosto de 2018 e julho de 2019. Os estudos seguiram em um bom ritmo, sendo cumprido todo cronograma previsto.

É importante ressaltar que o aluno cadastrado escreveu uma monografia detalhada acerca do tema proposto neste projeto, a qual culminou em seu trabalho de conclusão de curso (VER ANEXO). Levando em consideração que, salvo melhor juízo, não existem textos que agrupem os requisitos básicos para o estudo dos resultados iniciais sobre sistemas dinâmicos de dimensão infinita juntamente com aplicações desta teoria a problemas relevantes em equações diferenciais parciais, a referida monografia pode ser considerada como um excelente produto final do projeto em questão. De fato, tal texto servirá como base para demais estudantes do final da graduação em matemática ou áreas afins que se interessem por este tema de pesquisa.

Por fim, graças ao projeto, o discente teve contato com temas atuais e importantes na linha de equações diferenciais parciais, contato este que irá auxiliá-lo no decorrer de sua formação em nível de pós-graduação.

Referências

[1] Temam, R., Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Vol. 68. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Robinson, J. C., Infinite-dimensional dynamical systems: an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors. Vol. 28. Cambridge University Press, 2001.

[3] Brezis, H., Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science & Business Media, 2010.

[4] Carvalho, A. N., Notas de aula de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares. ICMC-USP, 2009

[5] Von Wahl, Wolf. The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations. Braunschweig: Vieweg, 1985.

[6] Teixeira, E., Botelho, G., e Pellegrino, D., Fundamentos de Análise Funcional. Rio de Janeiro: SBM (2012).

[7] Lima, E. L., Espaços métricos. Vol. 4. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1983.

[8] Bowers, A. and Kalton, N. J., An introductory course in functional analysis. Springer, 2014.